函数入门：从公式到图像

用表格、公式和坐标图表示变化关系

Namishu

这份讲义从“一个量改变，另一个量跟着改变”开始，介绍函数的基本含义，以及语言、公式、表格和图像之间的转换。读者会看到函数如何帮助我们重新理解一次函数、二次函数、指数函数、对数函数和方程。

目录

1 一个数变了，另一个数也跟着变

我们先从一个很简单的问题开始。

> 一支笔 3 元。买 x 支笔，一共要花多少钱？

如果买 1 支，花 3 元；买 2 支，花 6 元；买 5 支，花 15 元。我们把它们列成表格。

买几支笔 x	**花多少钱 y**
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15

这里有两个量：买几支笔 x，花多少钱 y。当 x 改变时，y 也会跟着改变。它们之间的规则很清楚：

$$y = 3x.$$

这就是函数最重要的出发点：

核心想法

一个量改变，另一个量按照某种规则跟着改变。我们就用函数来描述这种关系。

1.1 再看几个例子

- **正方形的面积** 如果一个正方形的边长是 x，那么它的面积是

$$y = x^2.$$

边长变大，面积也会变大。不过面积不是每次加同样多，而是按照平方的规则变化。

- **复利存款** 如果一开始存入 1000 元，每年增长为原来的 1.1 倍，那么第 n 年结束时的余额是

$$B_n = 1000 \cdot 1.1^n.$$

这里 n 变了，余额 B_n 也跟着变。

- **等差数列** 一个数列的第 n 项是

$$a_n = 2n + 1.$$

当 $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ 时，数列是

$$3,\ 5,\ 7,\ 9, \ldots$$

这也可以看成一种函数关系：输入第几项 n，输出这一项的值 a_n。

- **思考**

1. 在 $y = 3x$ 中，如果 x 增加 1，y 增加多少？
2. 在 $y = x^2$ 中，如果 x 从 2 变成 3，y 增加多少？如果 x 从 3 变成 4 呢？
3. 为什么 $B_n = 1000 \cdot 1.1^n$ 和等比数列很像？

2 函数是一条规则

现在我们给这种关系一个名字。

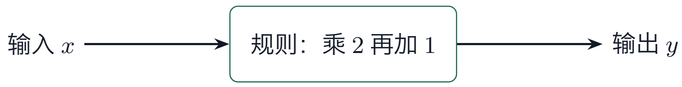
函数

如果给定一个输入 x，按照某条确定的规则，可以得到一个输出 y，那么我们就说 y 是 x 的函数。

这个定义里最重要的是“确定”。也就是说，同一个输入不能一会儿得到这个结果，一会儿得到另一个结果。

2.1 像机器一样理解函数

我们可以把函数想成一台机器。



如果规则是“乘 2 再加 1”，那么输入 x 后，输出就是

$$y = 2x + 1.$$

为了方便，我们常常把这条规则记作

$$f(x) = 2x + 1.$$

这里的 f 是函数的名字，x 是输入，$f(x)$ 是输出。

函数符号

$$f(x) = 2x + 1$$

表示：函数 f 的规则是，把输入 x 变成 $2x + 1$。

- **注意** $f(x)$ 不是 f 乘以 x。它的意思是“把 x 放进函数 f 里面以后得到的结果”。

2.2 代入不同的输入

如果

$$f(x) = 2x + 1,$$

那么

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7.$$

这表示输入 3，输出 7。

如果输入的是 -2，那么

$$f(-2) = 2 \cdot (-2) + 1 = -3.$$

如果输入的是 $a + 1$，也要把 $a + 1$ 整体放进去：

$$f(a + 1) = 2(a + 1) + 1 = 2a + 3.$$

- **思考** 已知 $f(x) = x^2 - 4x$。

1. $f(0)$ 等于多少?
2. $f(3)$ 等于多少?
3. $f(a)$ 等于多少?
4. $f(a+1)$ 等于多少?

3 同一个函数的几种样子

一个函数可以用语言、公式、表格和图像来表示。它们看起来不同，但说的是同一个关系。

3.1 从语言到公式

假设规则是:

> 输入一个数，先平方，再减去 4。

我们可以把它写成公式:

$$f(x) = x^2 - 4.$$

这条公式比语言更短，也更方便计算。

3.2 从公式到表格

我们选几个输入，算出对应的输出。

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x) = x^2 - 4$	5	0	-3	-4	-3

再继续算:

x	2	3	4	5
$f(x) = x^2 - 4$	0	5	12	21

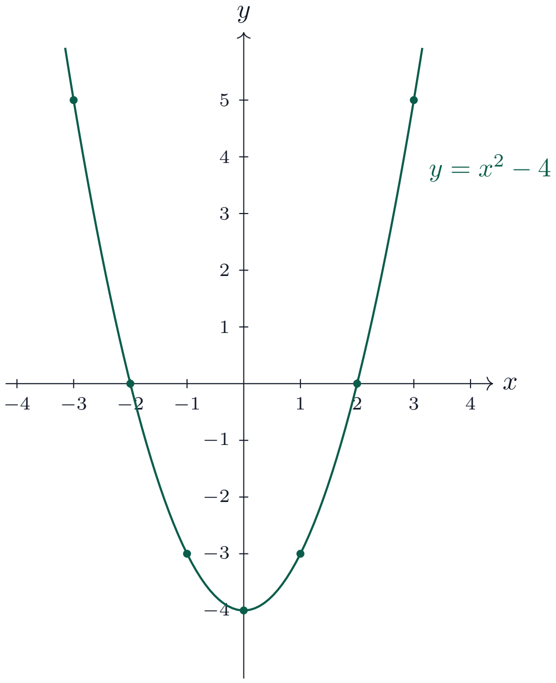
表格的好处是直观。我们可以一眼看到：当 $x = -2$ 和 $x = 2$ 时，输出都是 0。

3.3 从表格到图像

每一组输入和输出，都可以写成一个点:

$$(x, f(x)).$$

例如，当 $x = -2$ 时，$f(x) = 0$，对应点是 $(-2, 0)$；当 $x = 0$ 时，$f(x) = -4$，对应点是 $(0, -4)$。



这些点连起来，就得到函数的图像。图像让我们可以看见函数的变化。

图像的意思

函数图像上的每一个点，都表示一组对应关系：横坐标是输入 x，纵坐标是输出 $f(x)$。

4 一次函数：图像是一条直线

先看最简单的一类函数：

$$f(x) = 2x + 1.$$

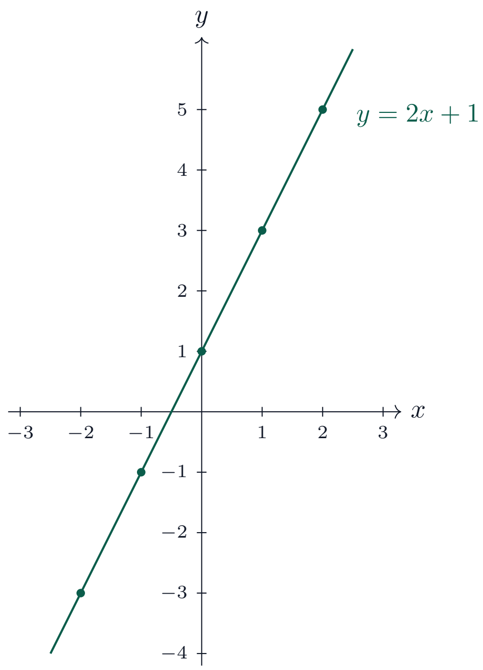
它的规则是：输入乘 2，再加 1。

4.1 先做表格

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = 2x + 1$	-3	-1	1	3	5

把这些点画出来：

$$(-2, -3),\ (-1, -1),\ (0, 1),\ (1, 3),\ (2, 5).$$



我们发现这些点排成一条直线。所以像 $f(x) = 2x + 1$ 这样的函数，叫做一次函数。

一次函数

形如

$$f(x) = kx + b$$

的函数叫做一次函数。其中 k 和 b 是固定的数，并且 $k \neq 0$。

4.2 直线里的两个数字

在

$$f(x) = 2x + 1$$

中，2 表示：当 x 每增加 1，$f(x)$ 增加 2。而 1 表示：当 $x = 0$ 时，函数值是 1。

再看

$$g(x) = -x + 3.$$

当 x 每增加 1，$g(x)$ 反而减少 1。所以它的图像是一条向右下方走的直线。

思考

1. 对于 $f(x) = 5x - 2$，当 x 每增加 1，$f(x)$ 增加多少？
2. 对于 $g(x) = -3x + 4$，当 x 每增加 1，$g(x)$ 怎样变化？
3. $h(x) = 7$ 的图像是什么样子？它是不是一次函数？

5 二次函数：图像会弯起来

现在看一个已经很熟悉的式子：

$$f(x) = x^2.$$

5.1 平方带来的对称

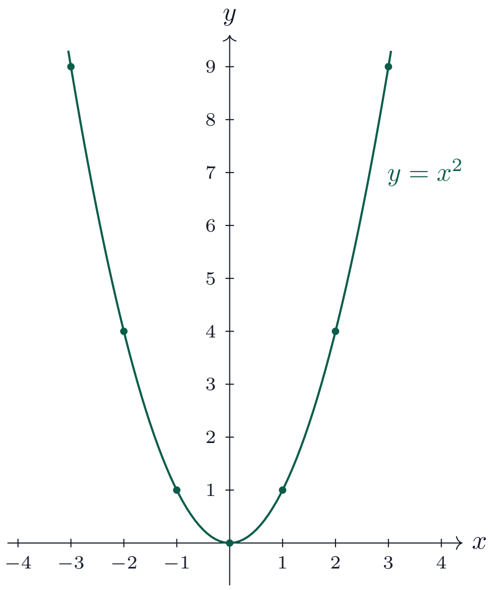
列一个表：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9

因为

$$(-3)^2 = 3^2, \quad (-2)^2 = 2^2, \quad (-1)^2 = 1^2,$$

所以图像左右两边是对称的。



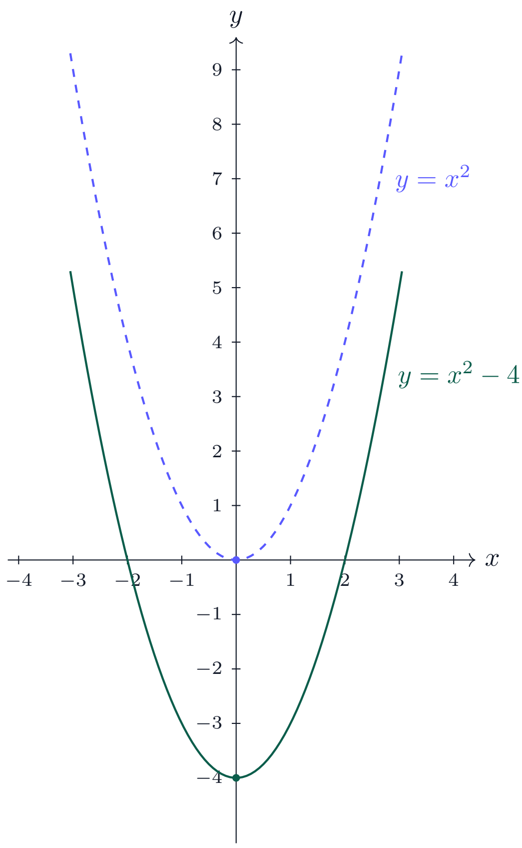
这个图像不是直线，而是一条弯曲的曲线。它最低的点是 $(0, 0)$。

5.2 把图像向下移动

再看

$$f(x) = x^2 - 4.$$

和 $y = x^2$ 相比，它只是每一个输出都减少 4。所以整个图像向下移动 4 个单位。最低点从 $(0, 0)$ 变成 $(0, -4)$。



这个例子非常重要，因为它马上会和方程联系起来。

6 解方程就是找交点

我们先不急着讲一般规律，先从一个熟悉的方程开始。

解方程

$$2x + 1 = 0.$$

代数方法是：

$$2x = -1, \quad x = -\frac{1}{2}.$$

现在换一个角度看它。方程左边是

$$2x + 1.$$

这正好可以看成一个函数的输出。令

$$f(x) = 2x + 1.$$

这个函数的意思是：输入 x，输出 $2x + 1$。于是，原来的方程

$$2x + 1 = 0$$

就可以换成下面这句话：

> 找到一个输入 x，让函数 $f(x)$ 的输出等于 0。

也就是找

$$f(x) = 0.$$

6.1 输出等于 0，图像上在哪里？

函数图像上的点是

$$(x, f(x)).$$

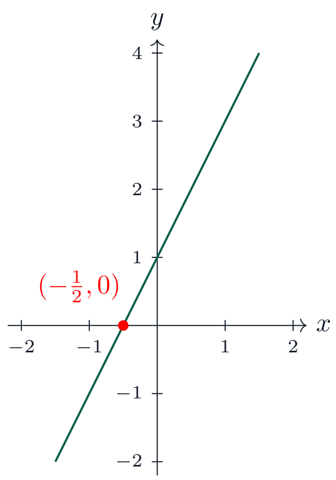
横坐标是输入 x，纵坐标是输出 $f(x)$。

如果 $f(x) = 0$，那么这个点就是

$$(x, 0).$$

它的纵坐标是 0。在坐标系里，所有纵坐标为 0 的点都在 x 轴上。

所以，找 $f(x) = 0$，就是找图像上落在 x 轴上的点。换句话说，就是找图像和 x 轴的交点。



上图中，直线 $y = 2x + 1$ 和 x 轴的交点是

$$\left(-\frac{1}{2}, 0\right).$$

这个点的横坐标是 $-\frac{1}{2}$，所以方程的解是

$$x = -\frac{1}{2}.$$

6.2 二次方程的例子

现在用同样的想法看一个二次方程：

$$x^2 - 4 = 0.$$

代数方法是：

$$x^2 = 4, \quad x = -2 \text{ 或 } x = 2.$$

也可以用平方差公式：

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2).$$

所以

$$(x + 2)(x - 2) = 0,$$

得到

$$x = -2 \quad \text{或} \quad x = 2.$$

接下来换成函数图像的角度。方程左边是

$$x^2 - 4.$$

令

$$f(x) = x^2 - 4.$$

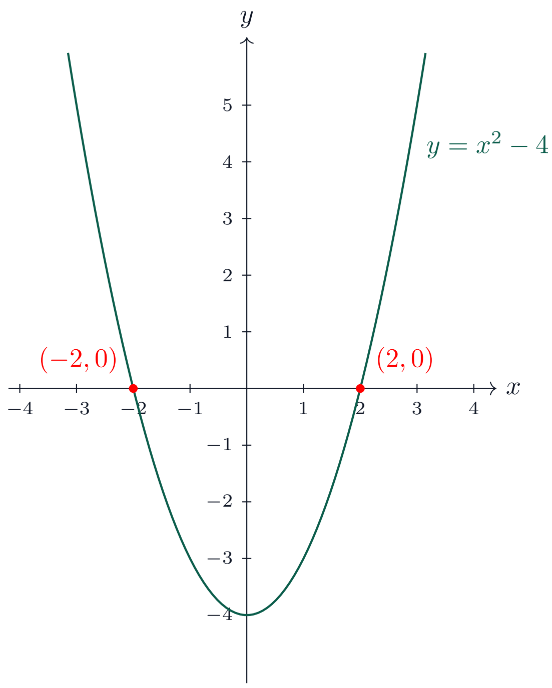
原来的方程

$$x^2 - 4 = 0$$

就变成：

> 找到所有输入 x，让函数 $f(x)$ 的输出等于 0。

也就是找图像 $y = x^2 - 4$ 上哪些点的纵坐标是 0。



交点的横坐标是 -2 和 2，正好就是方程的两个解。

函数和方程的联系

解方程

$$f(x) = 0$$

就是找函数图像和 x 轴的交点。交点的横坐标，就是方程的解。

6.3 没有交点会怎样？

看方程

$$x^2 + 1 = 0.$$

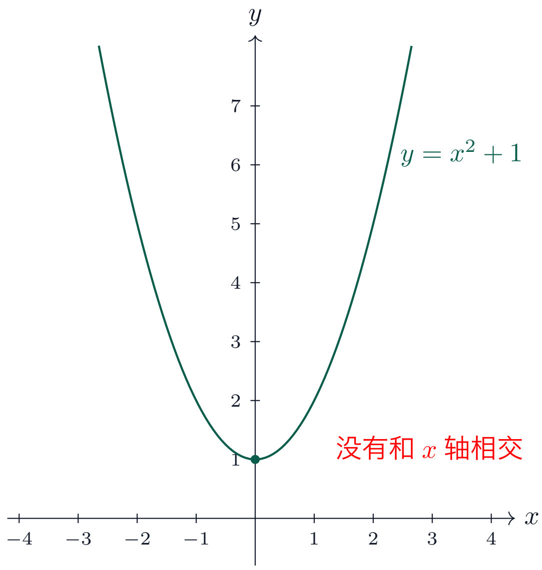
如果令

$$f(x) = x^2 + 1,$$

那么由于 $x^2 \geq 0$，所以

$$x^2 + 1 \geq 1.$$

这说明 $f(x)$ 永远大于 0，图像不会碰到 x 轴。



所以方程

$$x^2 + 1 = 0$$

没有实数解。

这和我们以前用判别式看到的结果是一致的。

7 把旧知识放进函数里

函数不是一个孤立的新知识。很多学过的公式，都可以放进函数的语言里重新理解。

7.1 完全平方公式

看函数

$$f(x) = (x-3)^2.$$

因为一个数的平方总是大于或等于 0，所以

$$f(x) \geq 0.$$

当 $x = 3$ 时，

$$f(3) = (3-3)^2 = 0.$$

所以这个函数的最小值是 0，出现在 $x = 3$。

如果展开：

$$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9.$$

于是我们知道

$$x^2 - 6x + 9$$

其实是一个永远不小于 0 的式子。它只有在 $x = 3$ 时才等于 0。

- **和方程联系起来** 方程

$$x^2-6x+9=0$$

可以写成

$$(x-3)^2=0.$$

所以只有一个解：

$$x=3.$$

图像上，这表示曲线刚好碰到 x 轴一次。

- **自己试着画一画** 这里先不直接给出图像。请你按照前面的方法，选几个 x 的值，计算

$$f(x)=(x-3)^2,$$

再把点 $(x,f(x))$ 画在坐标系里。画完以后观察：图像在哪里达到最低点？它和 x 轴有几个交点？

7.2 平方差公式

看函数

$$f(x)=x^2-9.$$

利用平方差公式：

$$x^2-9=(x+3)(x-3).$$

如果要解

$$x^2-9=0,$$

就等价于

$$(x+3)(x-3)=0.$$

所以

$$x=-3 \quad \text{或} \quad x=3.$$

图像上，这两个数就是 $y=x^2-9$ 和 x 轴的两个交点的横坐标。

- **自己试着画一画** 这里也把图像留给你完成。请你列出 $x=-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4$ 时

$$f(x)=x^2-9$$

的函数值，再画出图像。画完以后检查：图像是不是在 $x=-3$ 和 $x=3$ 这两个地方穿过 x 轴？

7.3 指数函数

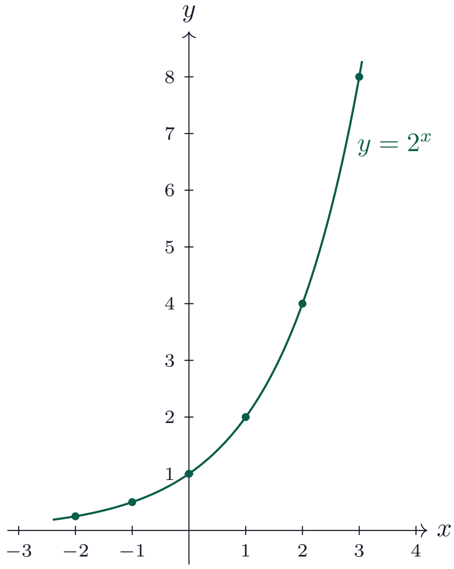
再看指数：

$$f(x)=2^x.$$

列一个表：

x	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

当 x 每增加 1，函数值都会变成原来的 2 倍。这就是等比数列和复利公式背后的同一个想法：每一步都乘同一个数。



思考 如果 $f(x) = 3^x$，那么当 x 每增加 1，函数值会变成原来的几倍？

7.4 对数函数

对数可以看成指数的反方向问题。

如果

$$y = 2^x,$$

那么输入 x，输出 2^x。

如果反过来问：

> 2 的几次方等于 y？

这个“几”就是

$$\log_2 y.$$

例如：

$$2^3 = 8,$$

所以

$$\log_2 8 = 3.$$

函数

$$g(x) = \log_2 x$$

的意思是：输入一个正数 x，输出“2 的几次方等于 x”。

x	1	2	4	8	16
$\log_2 x$	0	1	2	3	4

这里要注意：对数函数的输入必须是正数。因为 2^x 的结果永远大于 0。

8 函数帮我们看清变化

学函数，不只是为了多一个符号。更重要的是，它让我们能看清“变化的规则”。

8.1 一次函数：每次加同样多

例如

$$f(x) = 3x + 2.$$

当 x 增加 1，$f(x)$ 每次都增加 3。这和等差数列很像。

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	5	8	11	14

8.2 指数函数：每次乘同样多

例如

$$g(x) = 5 \cdot 2^x.$$

当 x 增加 1，$g(x)$ 每次都变成原来的 2 倍。这和等比数列很像。

x	0	1	2	3	4
$g(x)$	5	10	20	40	80

8.3 二次函数：变化越来越快

例如

$$h(x) = x^2.$$

当 $x = 0, 1, 2, 3, 4$ 时，

$$h(x) = 0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16.$$

每一步增加的量是

$$1,\ 3,\ 5,\ 7.$$

增加的量本身也在增加。所以二次函数的图像会弯起来。

9 小结

这篇文章中，我们从具体例子出发，认识了函数的基本想法。

1. 函数描述的是：一个量改变，另一个量按照确定的规则跟着改变。
2. $f(x)$ 表示把 x 放进函数 f 后得到的输出，不是 f 乘以 x。
3. 同一个函数可以用语言、公式、表格和图像来表示。
4. 函数图像上的点 $(x, f(x))$ 表示：输入是 x，输出是 $f(x)$。
5. 解方程 $f(x) = 0$，就是找函数图像和 x 轴的交点。

6. 一次函数像等差数列，每一步加同样多；指数函数像等比数列，每一步乘同样多；二次函数的变化会越来越快。

最重要的一句话

函数不是为了把数学变复杂，而是为了把很多分散的知识放到同一个框架里：公式告诉我们怎么算，表格告诉我们一些具体结果，图像让我们看见变化，方程则帮助我们找到特殊的位置。