看见生活中的指数

从重复乘法理解指数增长

Namishu

这份讲义从游戏升级、乌龟爬行、棋盘米粒和银行利息出发，帮助读者理解指数是怎样描述“反复按比例变化”的。重点包括 0 次方、负指数、分数指数和指数运算法则。

目录

1 每一步都在做乘法

有一款打怪升级的游戏。人物等级从第 0 级开始，升到第 1 级需要 10 点经验值。接下来每升一级需要的经验值都是前一个等级的 2 倍。你需要计算前 10 级需要的经验值，并把结果填写在下面的表格中。

等级	经验值
1	10
2	
3	
4	
5	

等级	经验值
6	
7	
8	
9	
10	

- **思考**

1. 如果要算第 20 级需要的经验值，你还愿意一项一项算吗？
2. 在计算过程中，有没有一个不断重复的动作？

1.1 有没有更方便的写法？

再看刚才的变化过程：

$$10 \times 2 \times 2 \times 2 \times \cdots$$

- **思考**

1. 这些乘法中，哪些部分是重复的？
2. 如果用一个符号来表示“连续乘很多次 2”，会不会更方便？

指数的写法

把“连续乘同一个数”写成下面的形式：

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ 个}}$$

读作“a 的 n 次方”。在这个写法中，下面的数字 a 称为“底数”，右上角的数字 n 称为“指数”。在后面的讨论中，我们默认底数 $a > 0$。

试着用这种写法，把每一级需要的经验值写出来。
先看 1 级，它翻倍 0 次，经验值为 10；
再看 2 级，它翻倍 1 次，经验值为 10×2^1；
再看 3 级，它翻倍 2 次，经验值为 10×2^2；
以此类推。

等级	经验值
1	10
2	10×2^1
3	10×2^2
4	
5	

等级	经验值
6	
7	
8	
9	
10	

思考

1. 20 级需要的经验值是多少？写成指数形式。
2. 某级需要的经验值跟 1 级相比，它翻倍的次数是 5 次，请问它是第几级？
3. 某级需要的经验值跟 1 级相比，它翻倍的次数是 19 次，请问它是第几级？
4. 我们知道 1 级需要的经验值，是它自己的 1 倍。换句话说，它翻倍的次数是 0。按照上面的写法，如果把它写成 10×2^0 的形式，那么 2^0 应该等于几？

0 次方

为了让前面的规律继续成立，人们规定

$$a^0 = 1$$

它表示“倍数”变化的次数为 0，那么结果就是之前的 1 倍。换句话说，一个数乘以 a^0，不会改变这个数的大小。

1.2 一共乘了多少次？

我们知道

$$3^5 = 3\times 3\times 3\times 3\times 3$$

$$3^4 = 3\times 3\times 3\times 3$$

请你计算：

$$3^5\times 3^4 = 3^?$$

用 m 和 n 代表两个自然数。计算下面的式子：

$$3^m\times 3^n = \underline{\qquad}$$

再把上面的底数 3 换成另一个数字 a，结果是什么呢？

$$a^m\times a^n = \underline{\qquad}$$

同底数幂相乘

$$a^m\times a^n = a^{m+n}$$

同底数幂相乘时，底数不变，指数相加。原因是指数记录的是“一共乘了多少次”。

2 把步骤倒过来看

已知 10 级需要的经验值是 10×2^9。那么，1 级的经验值是多少？现在从 10 级开始，往前进行推算。从前往后算是用“乘法”，那么从后往前算就是用“除法”。

- 9 级需要的经验值是（做 1 次除法）：

$$(10 \times 2^9) \div 2 = 10 \times 2^8$$

- 8 级需要的经验值是（做 2 次除法）：

$$10 \times 2^9 \div 2 \div 2 = 10 \times 2^7$$

- 7 级需要的经验值是（做 3 次除法）：

$$10 \times 2^9 \div 2 \div 2 \div 2 = 10 \times 2^6$$

- 依此类推，1 级经验值是（做 9 次除法）：

$$10 \times 2^9 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 = 10$$

我们发现，写连续的除法太麻烦了。我们希望找到更方便的写法。

2.1 更方便的写法

我们知道，除以一个数，等于乘以它的“倒数”，于是

$$x \div 2 = x \times \frac{1}{2}$$

因此

$$x \div 2 \div 2 = x \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = x \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

按照这样的规律，上面“计算 1 级经验”的式子可以写成

$$\begin{aligned}
&10 \times 2^9 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 \\
=&10 \times 2^9 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
=&10 \times 2^9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 \\
=&10
\end{aligned}$$

这个写法比“连除”要方便多了。但是，我们还是不太满意。因为还可以再改进一下它的形式，让它看起来更简单。考虑下面的例子。

$$2^{15} \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \underline{\qquad}$$

把结果写成指数的形式。

思考

1. 你能不能得到一个通用的计算方法?
2. 如果把问题改成下面这样（假设 $m > n$），你的答案是什么?

$$a^m \times \left(\frac{1}{a}\right)^n = \underline{\qquad\quad}$$

下面我们算一下。

$$\begin{aligned} a^m \times \left(\frac{1}{a}\right)^n &= \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m\text{个}} \times \underbrace{\frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \cdots \times \frac{1}{a}}_{n\text{个}} \\ &= \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m-n\text{个}} \\ &= a^{m-n} \end{aligned}$$

因此，在 $m > n$ 时有

$$a^m \times \left(\frac{1}{a}\right)^n = a^{m-n} \tag{1}$$

回顾前面你发现的指数乘法法则:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

如果我们允许 n 是一个负数，结果会是怎样? 可以把 n 写成 $-n$ 代入上式得到

$$a^m \times a^{-n} = a^{m-n} \tag{2}$$

把这两个式子 (1) 和 (2) 放在一起来看:

$$a^m \times \boxed{a^{-n}} = a^{m-n}$$

$$a^m \times \boxed{\left(\frac{1}{a}\right)^n} = a^{m-n}$$

注意上面“方框”中的内容，它们应该相等。

负指数

因此，我们做如下的定义：

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

另外，我们知道

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n = \underbrace{\frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \cdots \times \frac{1}{a}}_{n\text{ 个}} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ 个}}} = \frac{1}{a^n}$$

因此

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

即，

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

当 $n = -1$ 时，

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

注意，分母不等于 0 是除法才有意义。我们前面已经假设了底数 $a > 0$，因此负指数的定义是有意义的。

接下来，我们可以用“负指数”的形式来写“连续的除法”。回到上面经验值计算的问题。假设第 10 级需要的经验值是 x。你的任务是从 10 级需要的经验值往前推算，计算 9 级到 1 级需要的经验值。

先看 9 级，它需要的经验值等于 $x \div 2$。根据负指数的定义，它除以了 1 次，那就是 -1 次方，因此 $x \div 2 = x \times 2^{-1}$。

再看 8 级，它需要的经验值等于 $x \div 2 \div 2$。它除以了 2 次，那就是 -2 次方，因此 $x \div 2 \div 2 = x \times 2^{-2}$。

以此类推。把其余的结果写入下面的表格中。

等级	经验值
10	x
9	$x \times 2^{-1}$
8	$x \times 2^{-2}$
7	
6	

等级	经验值
5	
4	
3	
2	
1	

2.2 一共除了多少次？

我们知道

$$3^{-5} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$$

$$3^{-4} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$$

请你计算：

$$3^{-5} \times 3^{-4} = 3^?$$

用 m 和 n 代表两个自然数。计算下面的式子：

$$3^{-m} \times 3^{-n} = ?$$

再把上面的底数 3 换成另一个数字 a，结果是什么呢？

$$a^{-m} \times a^{-n} = ?$$

2.3 有乘法也有除法

计算下面的式子。答案写成指数的形式。

1. $2^5 \times 2^{-3} =$
2. $5^4 \times 5^{-4} =$
3. $2^5 \div 2^3 =$
4. $2^5 \div 2^{-3} =$
5. $1 \div \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} =$

- **思考** 假设 m 和 n 是两个整数，且 $a \neq 0$。它们可以为正，也可以为负。思考下面两个公式是否成立。

$$a^m \times a^{-n} = a^{m-n}$$
$$a^m \div a^{-n} = a^{m+n}$$

如果你觉得成立，解释一下原因。

3 每一步在变少呢？

有一只乌龟。它从家里出发去河边。从第 0 天开始，它爬了 10 米。接下来的每一天，它爬行的距离是前一天的一半。请问这只乌龟第 30 天爬行的距离是多少？

- **提示** 试着找一找规律。用指数的形式，把乌龟前 5 天的爬行距离写下来。

时间/天	距离/米
0	$10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0$
1	$10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1$
2	
3	
4	
5	

- **思考**

1. 假设某天爬行的距离是 $10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0$，请问这是第几天？
2. 假设某天爬行的距离是 $10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{30}$，请问这是第几天？
3. 假设某天爬行的距离是 10×2^{-30}，请问这是第几天？

4. 下面的等式成立吗？解释为什么。
$$\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
5. 下面的等式成立吗？解释为什么。
$$\frac{1}{2^n} = 2^{-n}$$

- **练习** 把乌龟前 5 天爬行的距离换一种写法。用“负指数”的形式写在下面的表格中。

时间/天	距离/米
0	10
1	10×2^{-1}
2	
3	
4	
5	

4 再说翻倍问题

思考一个问题：

> 有没有一种变化，走两步才翻倍一次？

比如说，游戏升级需要的经验值是“每 2 级翻倍”，比如 3 级是 1 级经验值的 2 倍；4 级是 2 级经验值的 2 倍；5 级是 3 级经验值的 2 倍，以此类推。

分数指数的直觉

用“分数”指数 $2^{\frac{1}{2}}$ 来描述每“两步”做一次变化。此外，我们希望指数的运算规律仍然成立，于是有下面的定义
$$2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2$$

- **思考** 你能根据这个定义估算出 $2^{\frac{1}{2}}$ 的数值吗（结果保留两位小数）？
- **练习** 根据这个定义，计算 2 级到 10 级需要的经验值。
  - 2 级的经验值是 1 级经验值的 $2^{\frac{1}{2}}$ 倍：
  $$x \times 2^{\frac{1}{2}}$$
  - 3 级的经验值是 2 级经验值的 $2^{\frac{1}{2}}$ 倍（是 1 级经验值的 2 倍）：
  $$x \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = x \times 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x \times 2^1$$
  - 4 级的经验值是 3 级经验值的 $2^{\frac{1}{2}}$ 倍（是 2 级经验值的 2 倍）：
  $$x \times 2^1 \times 2^{\frac{1}{2}} = x \times 2^{1+\frac{1}{2}} = x \times 2^{\frac{3}{2}}$$
  - 5 级的经验值是 4 级经验值的 $2^{\frac{1}{2}}$ 倍（是 3 级经验值的 2 倍）：
  $$x \times 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = x \times 2^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = x \times 2^2$$

按照这个规律，把结果写在下面的表格中。

等级	经验值
1	x
2	$x \times 2^{\frac{1}{2}}$
3	$x \times 2^1$
4	$x \times 2^{\frac{3}{2}}$
5	$x \times 2^2$

等级	经验值
6	
7	
8	
9	
10	

▪ **思考**

1. 现在把步数换成 3 步。即，每 3 步是之前的 2 倍。那么如何定义 $2^{\frac{1}{3}}$？你能估计出 $2^{\frac{1}{3}}$ 的数值吗（结果保留两位小数）？
2. 现在把步数换成 n 步。即，每 n 步是之前的 2 倍。那么如何定义 $2^{\frac{1}{n}}$？
3. 现在把倍数换成 10，即，每 n 步是之前的 10 倍。那么如何定义 $10^{\frac{1}{n}}$？
4. 现在把倍数换成 a，即，每 n 步是之前的 a 倍。那么如何定义 $a^{\frac{1}{n}}$？

分数指数

当 $a > 0$ 且 n 是正整数时，我们定义 $a^{\frac{1}{n}}$：

$$\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \cdots \times a^{\frac{1}{n}}}_{n\text{ 个}} = a$$

注意：这里的 $a^{\frac{1}{n}}$ 取实数范围内的主值（正根）。例如 $a^{\frac{1}{2}}$ 表示满足 $x^2 = a$ 的正数 x。

▪ **练习** 计算下面的问题。

1. $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{1}{4}} =$
2. $2^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{2}} =$
3. $a^2 \times a^{-1.7} =$

▪ **思考** 假设 m 和 n 是两个非零数。它们可以为正，也可以为负。它们可以是整数，也可以是小数。思考下面两个公式是否成立。

$$a^{\frac{1}{m}} \times a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$$

$$a^{\frac{1}{m}} \div a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}$$

如果你觉得成立，解释一下原因。

5 指数为什么会“骗过直觉”？

5.1 棋盘和米粒

现在把米粒放入棋盘。放入的规则如下：

- 第 1 格放 1 粒米
- 每一格的数量都是前一格的 2 倍

- **问题**

1. 第 10 格有多少粒?
2. 第 20 格有多少粒?
3. 如果棋盘有 64 格，它能放得下这么多米吗?

不要求算到最后，只要判断会不会出现问题，并说明理由。

5.2 看起来很慢，其实很快

下面是两种变化方式:

- A：初始值是 1，每天增加 10
- B：初始值是 1，每天乘以 1.1

- **思考**

1. 一开始哪一种变化更明显?
2. 过很久之后，哪一种更快?
3. 为什么前一段时间几乎感觉不到 B 的变化?

6 指数就在你身边

6.1 电池的电量

电池在充电和使用过程中会逐渐衰减。

- 新电池充满电的总电量是 100。
- 每一年都会只剩下原来的 80%

请你计算:

1. 第 1 年后的电量
2. 第 2 年后的电量
3. 第 5 年后的电量

并尝试把它们写成一个统一的算式。

- **思考**

1. 几年后电池的电量会小于 50?
2. 很多年以后电池的电量有可能变成 0 吗?

6.2 存钱的利息

如果你把钱存进银行，银行每年会“按比例”给你一些钱，称为“利息”。我们假设

- 第 0 年：存进银行 10000 元。
- 银行每一年会根据你上一年的账户金额，按照比例 3% 支付利息。

那么第 1 年时，银行会给你 $10000 \times 3\%$ 元。

思考

1. 第 1 年，你的账户一共有多少钱？
2. 第 2 年，你的利息有多少钱？
3. 第 2 年，你一共有多少钱？

请你计算前 5 年银行给你的利息，以及账户每年的总金额。

年	银行利息	账户金额
0	0	10000
1	$10000 \times 3\%$	$10000 \times (1 + 3\%)$
2		
3		
4		
5		

如果把刚开始存入银行的钱用符号 a 来表示。银行每年给你付钱的比例用 r 表示。那么第 n 年你一共有多少钱？把它用一个公式来表示。

7 你学到了什么？

7.1 知识点检查

1. 指数的乘法法则
$$3^5 \times 3^8 =$$
2. 指数的除法法则
$$2^{10} \div 2^7 =$$
3. “负指数”的定义和意义
$$2^{-5} =$$
4. 0 次方代表什么
$$a^0 =$$
5. “分数指数”的定义和意义
$$a^{\frac{1}{n}}$$
6. “小数指数”的计算
$$2^{1.5} =$$

7.2 基本公式理解

理解下面的公式。解释一下它们为什么成立。

指数运算的基本规则

1. 乘法法则
$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$
2. 除法法则（$a \neq 0$）
$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$
3. 负指数（$a \neq 0$）
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
4. 分数指数（$a > 0$）
$$\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \cdots \times a^{\frac{1}{n}}}_{n\text{ 个}} = a$$
5. 指数相乘（$m \times n$ 简写为 mn）
$$a^{mn} = a^{m\times n} = \underbrace{a^m \times a^m \times \cdots \times a^m}_{n\text{ 个}} = (a^m)^n$$
$$a^{mn} = a^{n\times m} = \underbrace{a^n \times a^n \times \cdots \times a^n}_{m\text{ 个}} = (a^n)^m$$

7.3 简单总结一下

请完成下面三句话：

1. 指数适合用来描述 ________________________________ 的变化。
2. 指数和“每次加一点”最大的不同是 ________________________________。
3. 我在生活中看见指数的地方有 ________________________________。

如果你能够把这些内容讲给别人听，说明你已经掌握了指数这个工具。