复利、年金终值与年金现值

从财务问题看数学结构

Namishu

通过复利和年金问题，把等比数列、指数运算和一元二次方程求解联系起来，理解它们如何在同一个实际问题中共同出现。

目录

1 复利：存一笔钱，最后有多少？

我们先从一个很具体的例子开始。

1.1 一个存钱的例子

你往银行存入 1000 元，年利率是 10%。银行每年结算一次利息：这一年的利息 = **这一年开始时的余额** $\times 10\%$。结算后的利息会计入余额，成为下一年的本金的一部分（这就是“复利”的关键）。

我们把每年的变化列出来。

第几年的结束	这一年的利息（元）	账户余额（元）
1	$1000 \times 10\% = 100$	$1000 + 100 = 1100$
2	$1100 \times 10\% = 110$	$1100 + 110 = 1210$
3	$1210 \times 10\% = 121$	$1210 + 121 = 1331$

思考

1. 第 2 年的利息为什么比第 1 年多？
2. 每一年，余额都在做同一件事：乘上一个固定的倍数。这个倍数是多少？

如果年利率是 10%，那么每年结算后，余额都会变成原来的

$$1 + 10\% = 1.1$$

倍。也就是说：**每年都在乘** 1.1**。**

1.2 先写成“递推式”

接下来引入一些符号来描述这个问题。

- 本金：P（一开始存入的钱）
- 年利率：r（例如 10% 就是 0.10）
- 第 n 年结束时的余额：B_n

我们期望得到一个通用的计算公式。开始时 $B_0 = P$。每过一年，余额会变成原来的 $(1 + r)$ 倍：

$$B_{n+1} = B_n(1 + r).$$

换句话说，先算利息 $B_n \times r$，再加上本金 B_n，等价于 B_n 直接乘以 $(1 + r)$。

1.3 复利公式自然出现

把上面的式子连续用几次：

$$B_1 = B_0(1 + r) = P(1 + r),$$
$$B_2 = B_1(1 + r) = P(1 + r)^2,$$
$$B_3 = B_2(1 + r) = P(1 + r)^3.$$

你会发现：指数就是在记录“**一共乘了多少次**”。

复利公式

$$B_n = P(1+r)^n$$

- **再做一个例子** 把 $P = 2000$ 元存进银行，年利率 $r = 5\% = 0.05$，存 4 年。第 4 年结束时的余额是

$$B_4 = 2000 \times (1.05)^4.$$

这里不必急着把小数算完。只要你看得懂：**每一年都在乘** 1.05**，一共乘 4 次**，就已经抓住了复利的核心。

- **思考**

1. 如果把一笔钱，分到两个账户，同时存进银行，总金额会不会有区别（跟一个账户相比）？
2. 已知本金 P，n 年后的账户余额 B_n，如何求利率 r？

2 年金终值：每个月存一笔钱，最后有多少？

现在我们把规则改一下：不再只存一次，而是每个月都存一笔钱。这个规则称为**定存**，也就是定期存一笔钱。定存的情况更复杂一些，因为每一笔钱的计息时间不同。我们先通过一个具体的例子来理解这个问题。

2.1 每月存钱的例子

你决定坚持 12 个月，每个月月底存入 100 元。银行的**月利率**是 1%（也就是 0.01）。我们问：

> 12 个月结束时，一共会有多少钱？

- **关键想法** 把每一笔存款都看成一笔独立的资金：先分别算它们到**第 12 个月月底**会变成多少，再把这些结果加起来。越早存入的那一笔，计息的时间就越长。

  - 第 1 个月月底存的 100 元，还要再计息 11 个月。它到第 12 个月月底会变成：100×1.01^{11}
  - 第 2 个月月底存的 100 元，还要再计息 10 个月。它到第 12 个月月底会变成：100×1.01^{10}
  - $\ldots$
  - 第 12 个月月底存的 100 元，不再计息。它到第 12 个月月底就是：$100 \times 1.01^0 = 100$

- **小结** 先分别算每一笔在第 12 个月月底的金额，再把它们加总。所以 12 个月后的总金额是

$$\begin{aligned}
&100 \times 1.01^{11} + 100 \times 1.01^{10} + \cdots + 100 \\
=&100 \times (1.01^{11} + 1.01^{10} + \cdots + 1) \\
=&100 \times (1 + 1.01 + 1.01^2 + \cdots + 1.01^{11})
\end{aligned}$$

注意到，$1, 1.01, 1.01^2, \ldots, 1.01^{11}$ 是一个等比数列，其中 $a_1 = 1$，公比 $q = 1.01$。数列一共有 $n = 12$ 项。用 S_{12} 代表这 12 项的总和。根据等比数列的求和公式，我们有

$$
\begin{aligned}
S_{12} &= \frac{a_1(1-q^{12})}{1-q} \\
&= \frac{1\cdot(1-1.01^{12})}{1-1.01} \\
&= \frac{1.01^{12}-1}{0.01} \\
&\approx \frac{1.1268-1}{0.01} \\
&= 12.68
\end{aligned}
$$

最后，我们得到 12 个月后的总金额是

$$100 \times (1 + 1.01 + 1.01^2 + \cdots + 1.01^{11}) = 100 \times 12.68 = 1268.$$

2.2 把例子抽象成公式

把数字换成符号：

- 每个月存入：x（例如 100）
- 月利率：r（例如 1% 就是 0.01）
- 一共存：n 个月
- 第 n 个月月底的总金额（终值）：F

按照刚才的想法：

$$F = x \cdot \left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \cdots + 1\right].$$

括号里是一个公比为 $(1+r)$ 的等比数列求和：

$$1 + (1+r) + \cdots + (1+r)^{n-1} = \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} = \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

所以我们得到下面的公式。

年金终值公式

$$F = x \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

提醒 我们默认“每个月 **月底** 存钱”。如果你改成“每个月 **月初** 存钱”，那么每一笔钱都会多算 1 个月利息，结果会再乘一个 $(1+r)$。

边界情况 如果月利率 $r = 0$，那么上面的公式不适用（因为分母不能为 0）。这种情况更简单，这时只要把每个月存入的钱直接加起来，即 $F = nx$。

3 借一笔钱，每一期还多少？

接下来讨论贷款还款的问题。

> 你向银行借一笔钱 P，分 n 期等额偿还。假设每期的借款利率是 r，那么还款金额 x 应该怎么计算？

3.1 先统一比较的时间点：都看第 n 期末

我们把所有金额都放到**同一个终点**来比较：第 n 期末。我们从两个视角来看，这一笔钱在第 n 期末的总金额。

- **第 1 种看法：借款本金的增长** 你今天借到本金 P，每期利率是 r。如果这笔钱一直不还，到第 n 期末会增长为

$$P(1+r)^n.$$

这相当于银行把这笔钱存到了你的手里，你需要付给银行本金以及利息。利息是 n 期的复利，所以每期都乘上 $(1+r)$，一共乘 n 次。

- **第 2 种看法：每期还款看成定存** 现在假设你每期末还款 x。从银行角度看，这相当于你每期往银行账户里"存入"一笔 x，共存 n 次。到第 n 期末，这 n 笔钱的总额就是年金终值（参考前面的年金终值公式）：

$$x \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

- **关键等式** 这两种看法描述的是**同一笔借贷关系**在第 n 期末的总金额，所以它们应当相等：

$$P(1+r)^n = x \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

3.2 先用一个具体例子解出每期还款

假设借款 $P = 3000$ 元，每期利率 $r = 10\% = 0.1$，共 $n = 3$ 期，每期等额还款 x。

代入上面的等式：

$$3000 \times 1.1^3 = x \cdot \frac{1.1^3 - 1}{0.1}.$$

解得

$$x = 3000 \times \frac{0.1 \times 1.1^3}{1.1^3 - 1} \approx 1206.27.$$

所以每期约还 1206.27 元。

3.3 推导每期还款公式

这一节要解决的问题是：已知借款本金 P、每期利率 r、总期数 n，求每期等额还款 x。

前面已经把借款本金和每期还款都放到第 n 期末比较。由"第 n 期末总账相等"得到

$$P(1+r)^n = x \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

现在直接把这个等式解出 x：

$$x = P \cdot \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} = P \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}.$$

每期还款公式（期末还款）

$$x = P \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$$

这就是等额本息还款中最常用的形式。它告诉我们：本金越大，x 越大；利率越高，x 也越大；期数越多，单期还款通常会变小，但总利息会增加。

- **同一个等式的另一种读法** 上面的公式也可以整理成“本金由每期还款决定”的形式：

$$P = x \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}.$$

这就是**年金现值公式**（期末支付）。它的意思是：未来每期支付 x，连续支付 n 期，在每期利率为 r 的条件下，这一串付款折算到今天，价值等于多少。

年金现值公式

$$P = x \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

- **和年金终值的对比** 年金终值是把每一期的 x 都推到**未来同一个时间点**，问最后一共有多少：

$$F = x \cdot \frac{(1+r)^{n}-1}{r}.$$

年金现值则是把每一期的 x 都折回**现在这个时间点**，问今天相当于多少钱：

$$P = x \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}.$$

两者本质上都在做同一件事：把不同时点的钱统一到同一个时间点，再相加。只是年金终值统一到未来，年金现值统一到现在。

- **单位提醒** 这里的 r 是**每期利率**，n 是**期数**。比如按月还款，就要用月利率和总月数；按年还款，就用年利率和总年数。
  - 你向银行借的钱：P （例如 3000 元）
  - 每期利率：r （例如 10%）
  - 一共分 n 期还款（例如分 3 期还款）
  - 每期还款的钱：x

- **时间点提醒** 我们默认“每期**期末**还款”。如果改成“每期**期初**还款”，那么每一笔还款都会提前 1 期，现值会再乘一个 $(1+r)$。

- **边界情况** 如果每期利率 $r=0$，那么上面的公式就不适用，应该写成 $P=nx$（这时只是把每一期的还款直接加起来）。

3.4 房贷例子：用年金现值算月供

现在看一个最常见的应用：**等额本息**房贷月供。

假设你向银行贷款 300 万元，贷款期限是 30 年，按月还款，一共 $n=360$ 期，房贷年利率为 4%。我们问：每个月要还多少钱？

- **第 1 步：把利率换成“每期利率”** 按最常见的约定，把名义年利率除以 12 得到月利率：

$$r = \frac{4\%}{12} = \frac{0.04}{12}.$$

- **第 2 步：套用年金现值公式** 把每月还款看成每期支付 x 元的年金。由于这些还款的现值之和应等于贷款本金 $P=3000000$，所以

$$P = x \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}.$$

解得

$$x = P \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-n}} = 3000000 \cdot \frac{0.04/12}{1-(1+0.04/12)^{-360}} \approx 14322.46\ (\text{元/月}).$$

也就是说，月供大约是 14322.46 元（约 1.43 万元/月）。

- **备注** 这个结果假设利率在 30 年内不变，且每月**期末**还款；不考虑手续费、提前还款等现实因素。

4 小结

这篇文章里我们得到了三条最常用的时间价值公式。它们看起来不一样，本质都离不开同一个核心：**每期都乘同一个数**，以及**把一串等比数列相加**。

三条核心公式

1. **复利（一次存入）**：$B_n = P \cdot (1+r)^n$。
2. **年金终值（每期存入）**：$F = x \cdot \dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$。
3. **年金现值（每期支付）**：$P = x \cdot \dfrac{1-(1+r)^{-n}}{r}$。

- **它们之间的联系**
  - **年金终值/年金现值**本质上是在做同一件事：把每一期的现金流放到同一个时间点比较（比如都放到第 n 期末），然后相加，所以都会出现等比数列求和。
  - 对同一组“每期末支付 x，共 n 期”的现金流，把它的现值 P 再复利到第 n 期末，就得到终值 F:

$$F = P(1+r)^n.$$

- **应用场景**
  - **复利**：一次性存入/一次性借入，计算若干期后的金额。
  - **年金终值**：每期存入（定投、每月存钱），想知道最后能攒到多少钱。
  - **年金现值**：每期等额支付（分期贷款、房贷月供、租金现金流），想知道借款额或每期应付金额。
  - 最容易出错的是**期的单位**：r 必须是每期利率，n 必须是期数（按月就用月利率和月数，按年就用年利率和年数），并注意区分**期末**与**期初**。